Graphische Datenverarbeitung

Mathematische Grundlagen

Prof. Dr. Elke Hergenröther

Mathematische Grundlagen: Transformationen

Punkte:

- Punkte in der Ebene werden durch ihre x- und y-Koordinaten festgelegt.
- Wir schreiben Punkte als Spaltenvektoren auf:

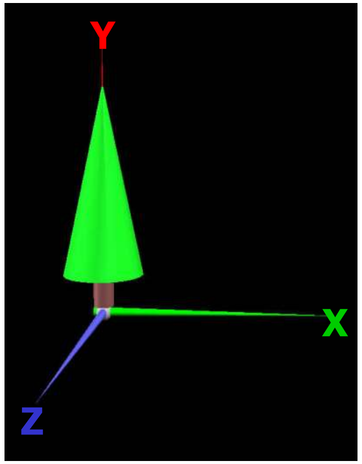
$$\vec{P} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$$

Affine Transformationen

- Translation (Verschiebung)
- Skalierung (Größenanderung)
- Rotation (Drehung)

Anordnung der Objekte im Raum

1.

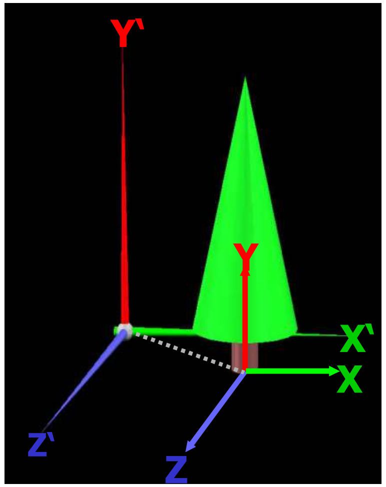


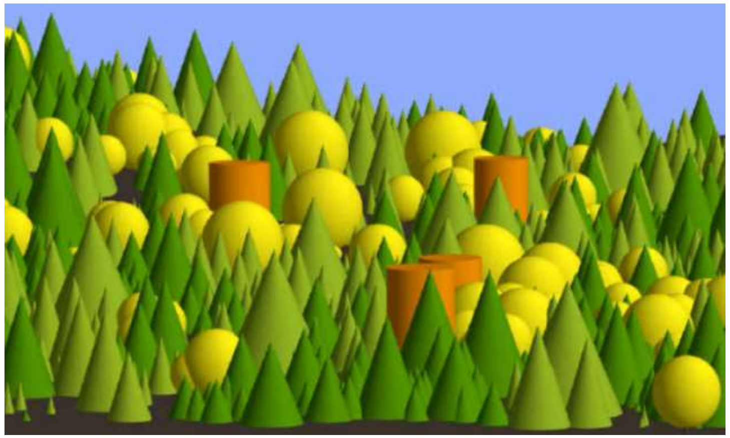
Modellierung des Objekts im lokalen Koordinatensystem

(Modellierungs-koordinatensystem oder körpereigenes Koordinatensystem)

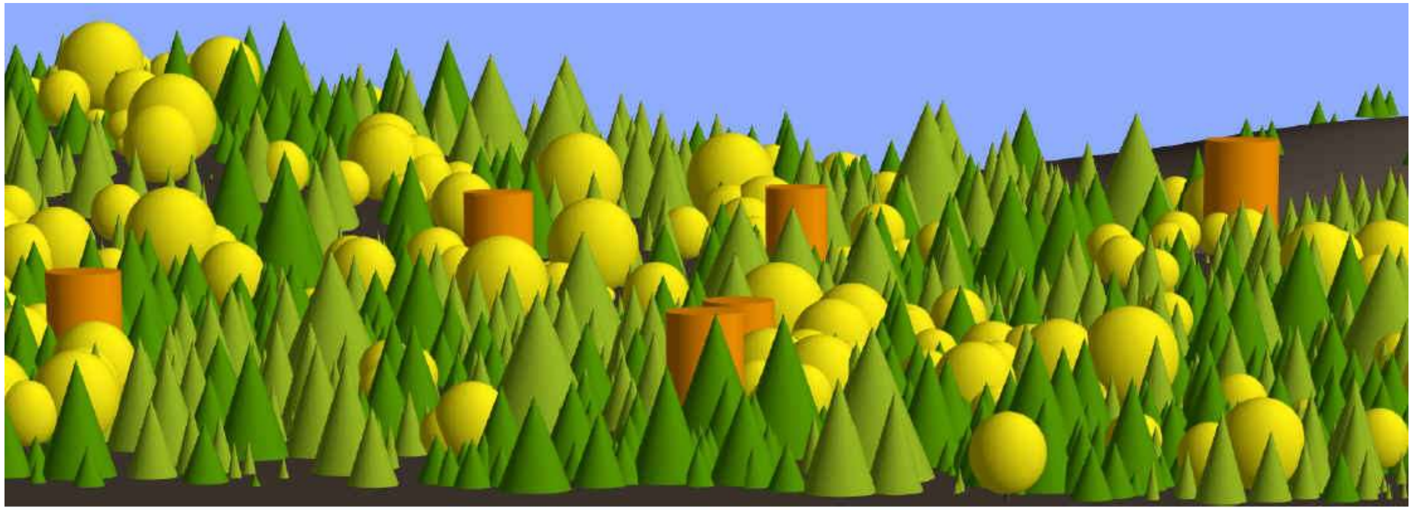
Transformation des Objekts im Weltkoordinaten-system

2.





Graphische Objekte und ihre Erzeugung



Translation (Verschiebung) im 2D Raum

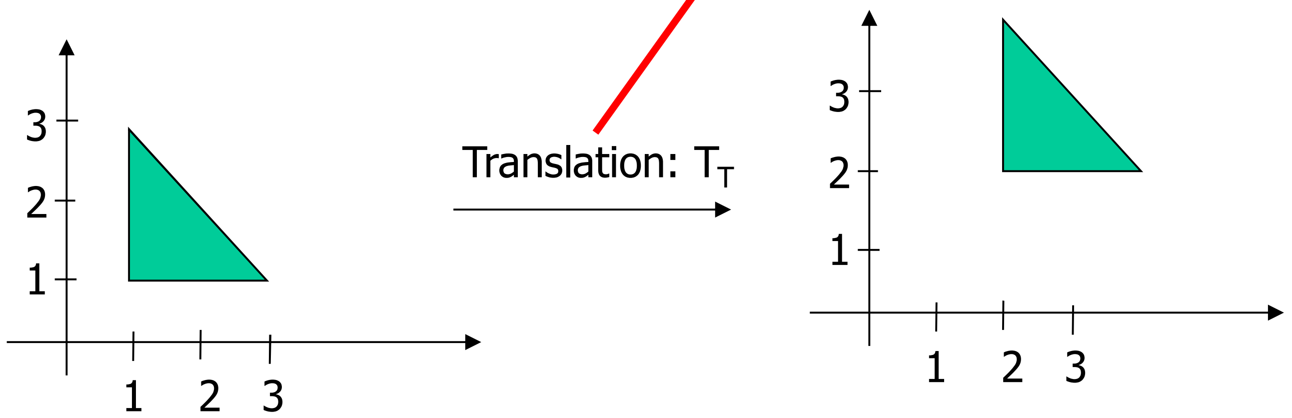
Translation eines Punktes $\vec{P} = [x_P, y_P]^t$

um dx in x- und

um dy in y-Richtung:

$x_P` = dx + x_P$
$y_P` = dy + y_P$

d.h. $\begin{bmatrix} x_P' \\ y_P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$ bzw. $\vec{P}' = T_T + \vec{P}$



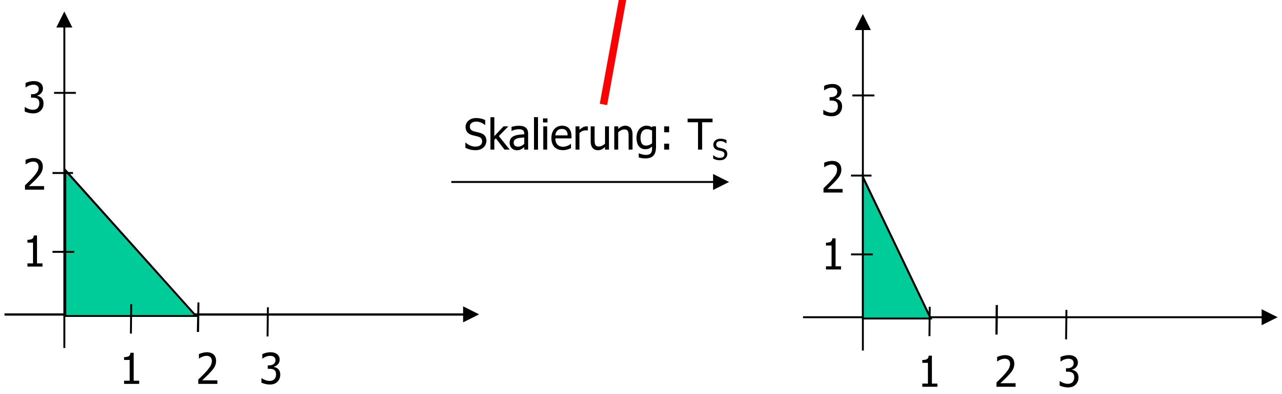
Skalierung (Größenänderung) im 2D Raum

Skalierung eines Punktes $\vec{P} = [x_P, y_P]^t$ mit s_x in x- und um s_y in y-Richtung:

$x_P` = s_x * x_P$

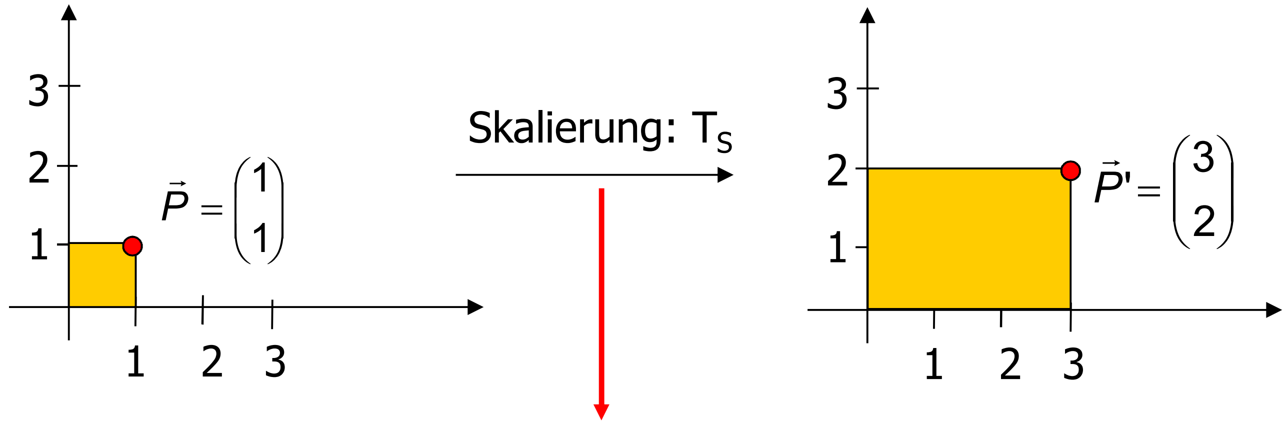
$y_P` = s_y * y_P$

d.h. $$\begin{bmatrix} x_P' \\ y_P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$$



Vorsicht: Die Skalierung ist nur gegenüber dem Nullpunkt invariant!

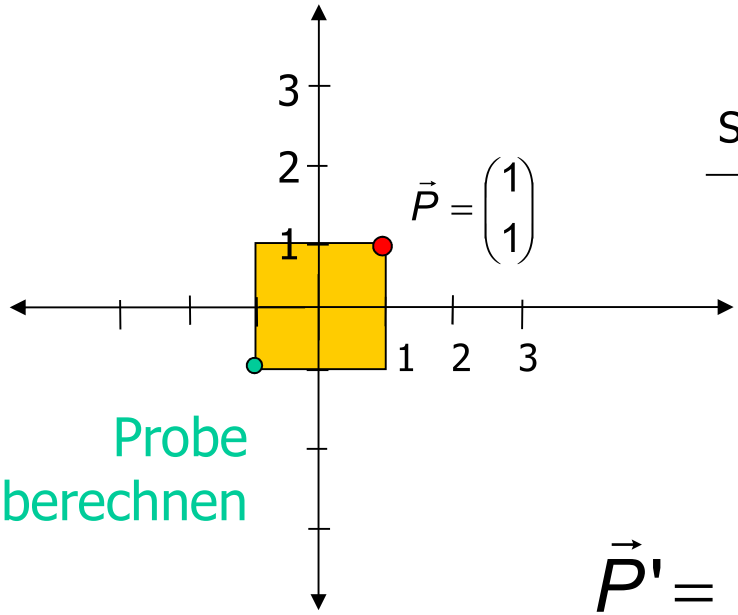
Skalierung (Größenänderung) im 2D Raum



$$\vec{P}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{P}$$

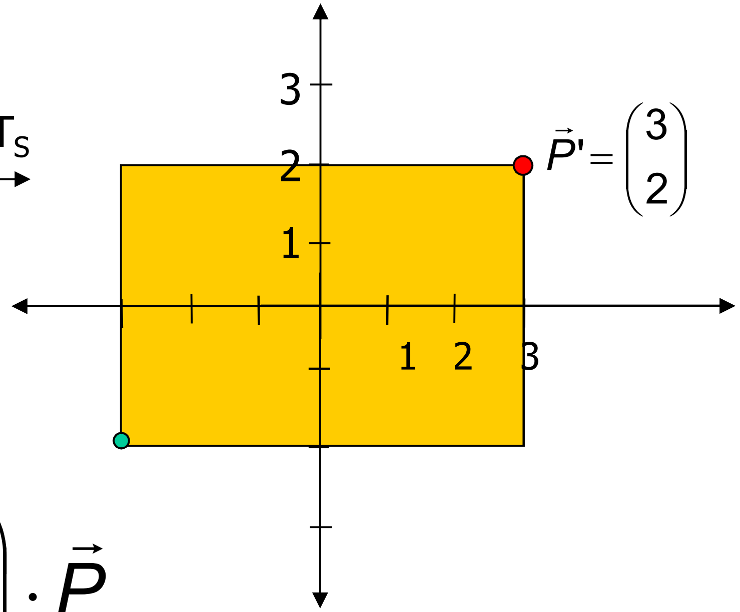
Beobachtung: Nullpunkt ist invariant!!!

Skalierung (Größenänderung) im 2D Raum



Probe berechnen

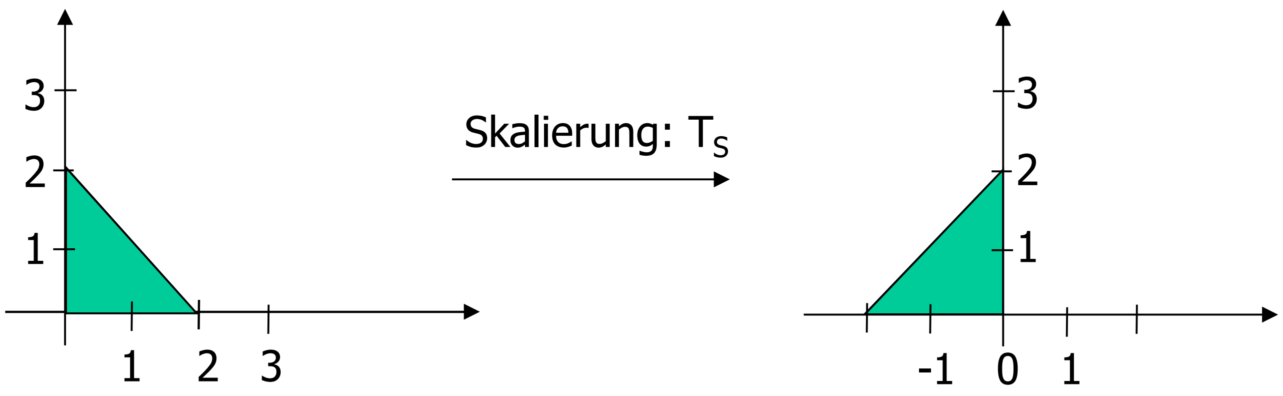
Skalierung: T_S



$$\vec{P}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{P}$$

Beobachtung: Nullpunkt ist invariant!!!

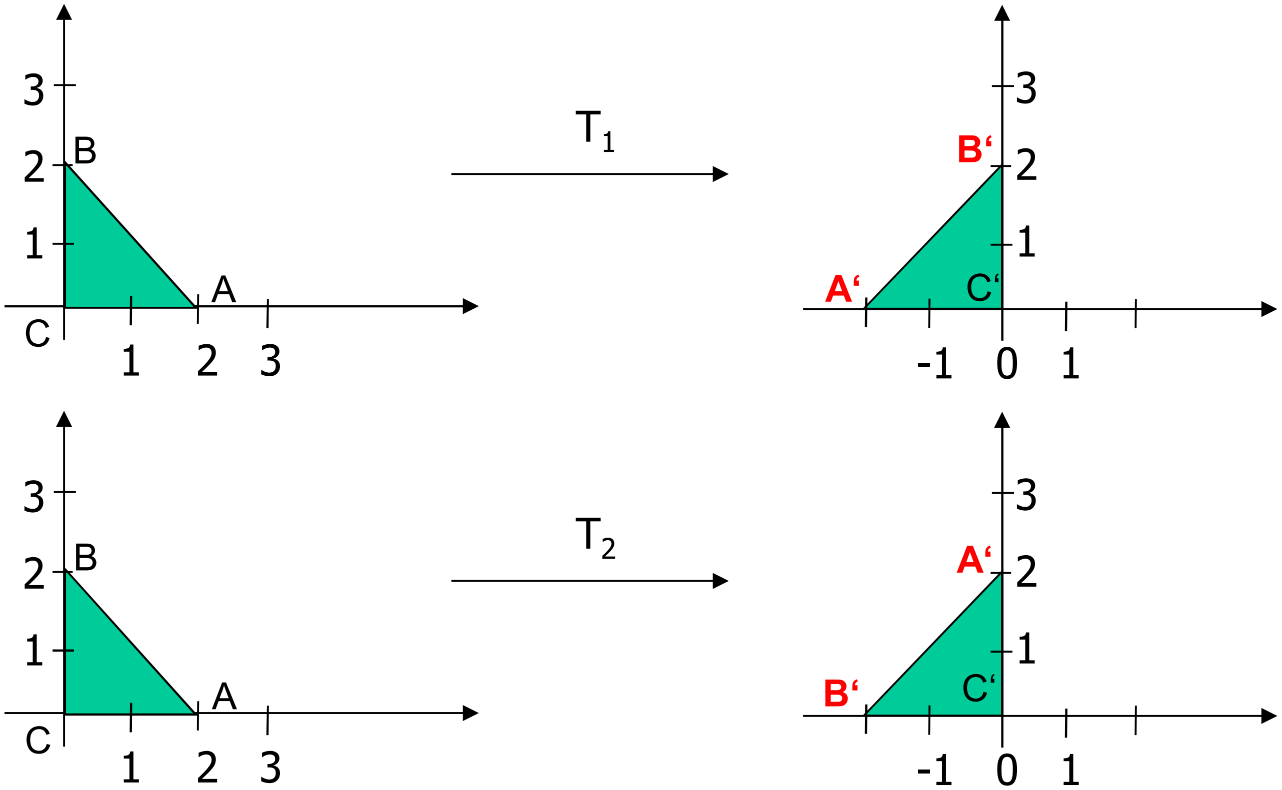
Transformationen im 2D Raum



Ohne Beschriftung der Eckpunkte gibt es mehrere Lösungen!

Welche?

Transformationen im 2D Raum



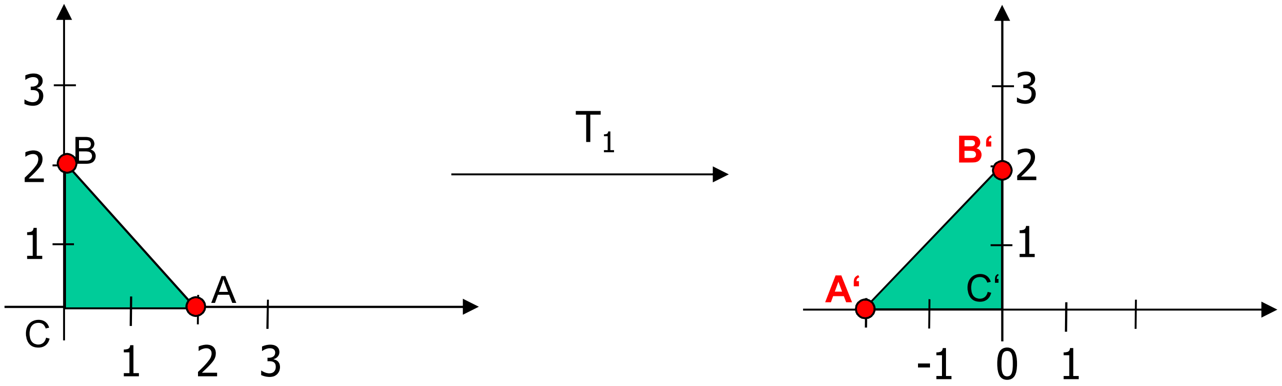
An der Y-Achse gespiegelt

Um 90° gedreht

Wie lauten die Matrizen?

Transformationen im 2D Raum

Wie lauten die Matrizen?



An der Y-Achse gespiegelt

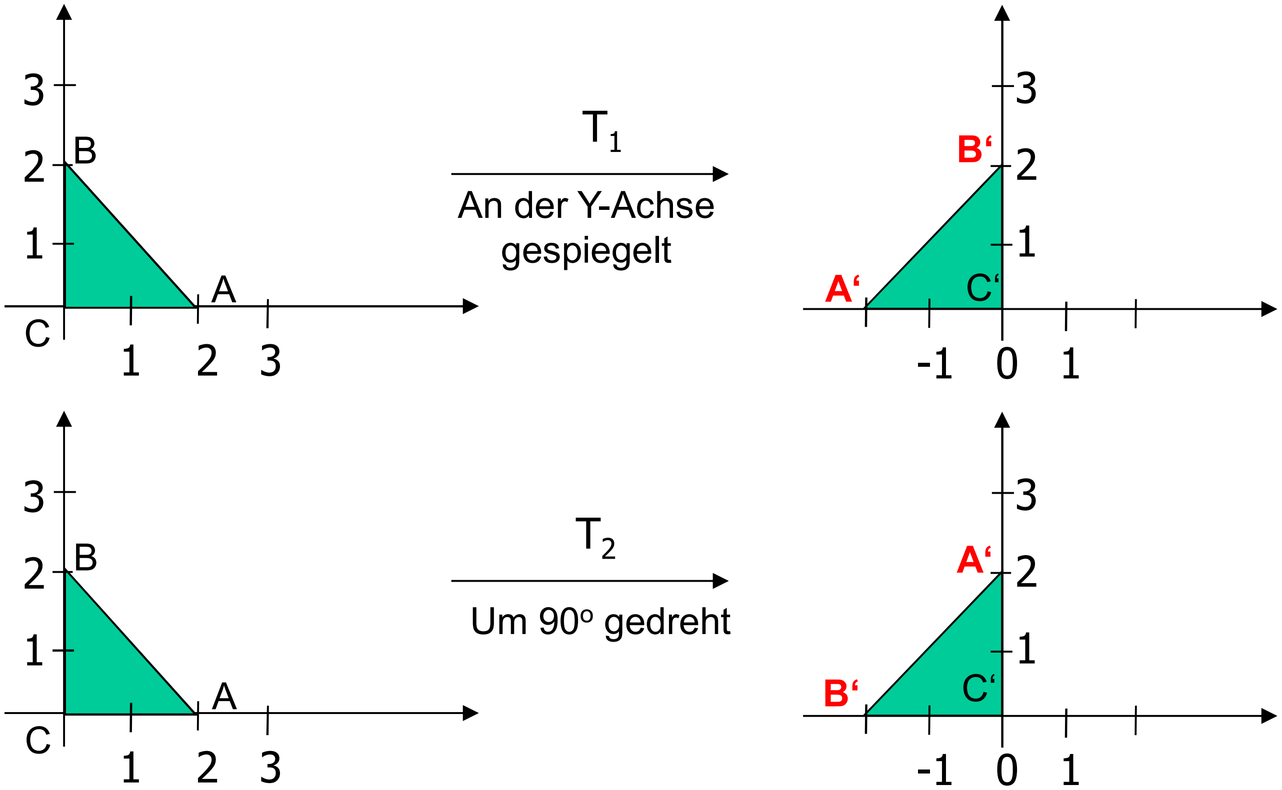
$$\vec{A}' = T_1 \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} \\ 2 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_{11} = -1 \\ x_{21} = 0 \end{matrix}$$

$$\vec{B}' = T_1 \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 \cdot x_{12} \\ 0 + 2 \cdot x_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_{12} = 0 \\ x_{22} = 1 \end{matrix}$$

Da x_{11} und x_{22} mit 0 multipliziert werden, können x_{12} und x_{22} nicht eindeutig bestimmt werden.

$$\vec{P}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{P}$$

Transformationen im 2D Raum



$$\vec{P}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{P}$$

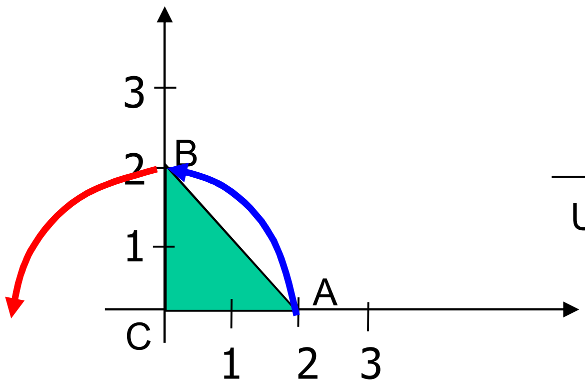
Wie lauten die Skalierungsmatrizen?

Transformationen im 2D Raum

$$\vec{A}' = T_1 \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} \\ 2 \cdot x_{21} + 0 \cdot x_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_{11} = 0 \\ x_{21} = 1 \end{matrix}$$

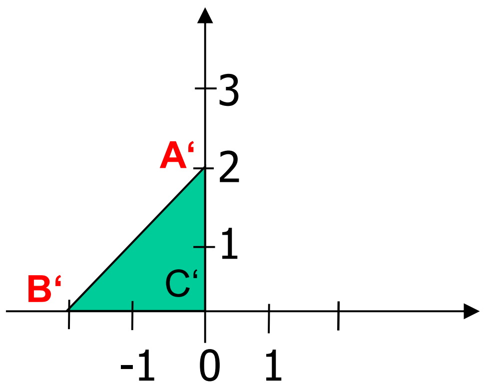
$$\vec{B}' = T_1 \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ 1 & x_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 \cdot x_{12} \\ 0 + 2 \cdot x_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_{12} = -1 \\ x_{22} = 0 \end{matrix}$$

$$\vec{P}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{P}$$



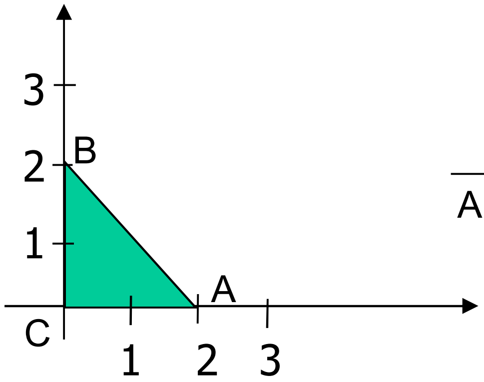
$\xrightarrow{T_2}$

Um 90° gedreht



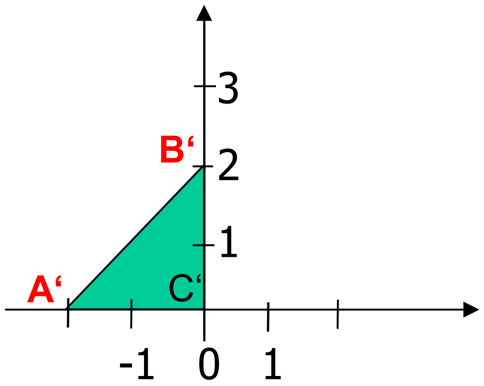
Wie lauten die Skalierungsmatrizen?

Transformationen im 2D Raum

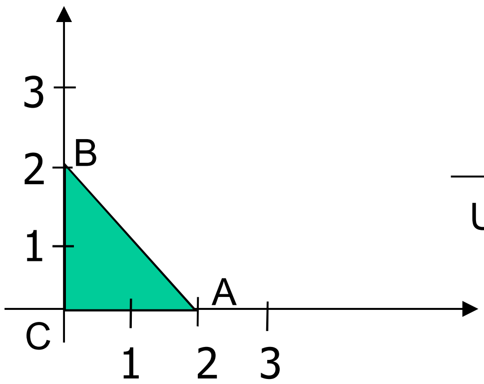


$\xrightarrow{T_1}$

An der Y-Achse gespiegelt

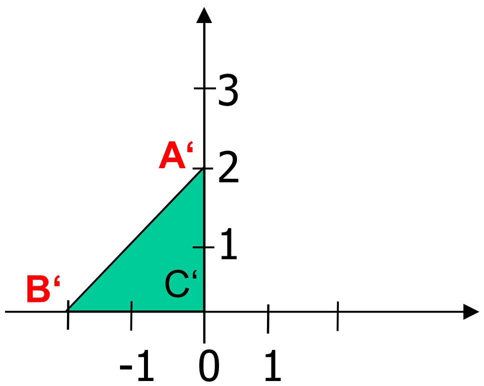


$$\vec{P}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{P}$$



$\xrightarrow{T_2}$

Um 90° gedreht

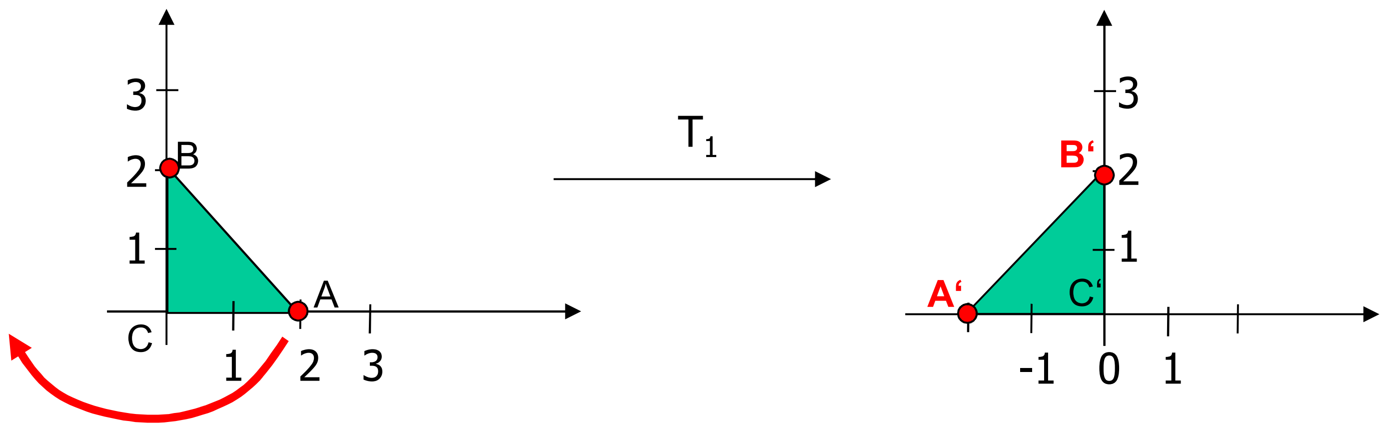


$$\vec{P}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{P}$$

Wie lauten die Matrizen?

Skalierung (Größenänderung) im 2D Raum

Wie lauten die Skalierungsmatrizen?



2. Variante:

$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \cdot x + x_{12} \cdot y \\ x_{21} \cdot x + x_{22} \cdot y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Homogene Koordinaten

Problem:

- Translation = Vektoraddition
- Skalierung & Rotation = Matrixmultiplikation

Da es sinnvoll ist die verschiedenen Transformationen miteinander zu einer akkumulierten Matrix zu „verrechnen“und dann auf alle Eckpunkte anzuwenden (siehe OpenGL), muss es eine Möglichkeit geben, den Additivanteil (Translation) und den Multiplikativanteil (Rotation, Skalierung) miteinander zu verknüpfen:

Lösung: Homogene Koordinaten

Homogene Koordinaten

Die Vektoren $\vec{x}'$, $\vec{y}'$ und $\vec{t}$ werden zu einer Matrix T (Transformationsmatrix) zusammengefasst:

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & y_1' & t_1 \\ x_2' & y_2' & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogene Koordinaten

Homogene Koordinaten

Die Vektoren $\vec{x}'$, $\vec{y}'$ und $\vec{t}$ werden zu einer Matrix T (Transformationsmatrix) zusammengefasst:

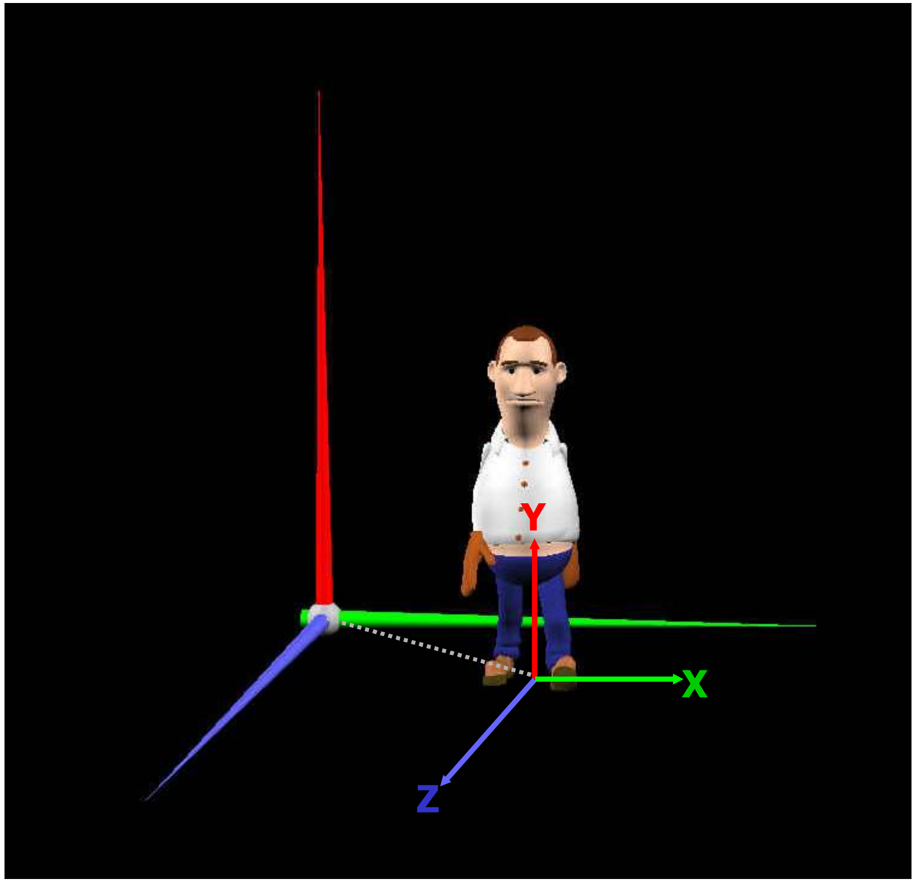
Multiplikativer Teil

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & y_1' & t_1 \\ x_2' & y_2' & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \cdot p_1 & y_1' \cdot p_2 & t_1 \cdot 1 \\ x_2' \cdot p_1 & y_2' \cdot p_2 & t_2 \cdot 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Additiver Teil

Homogene Koordinaten

Translation mit homogenen Koordinaten



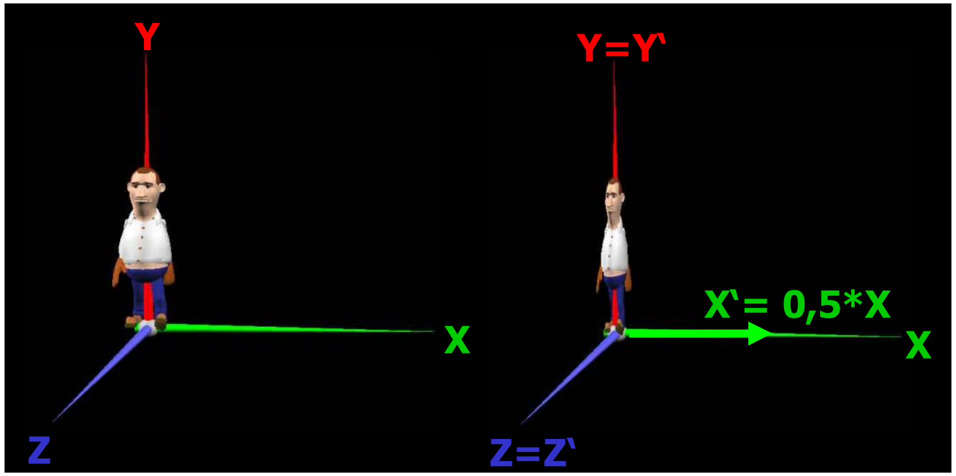
In 2D:

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In 3D:

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung mit homogenen Koordinaten



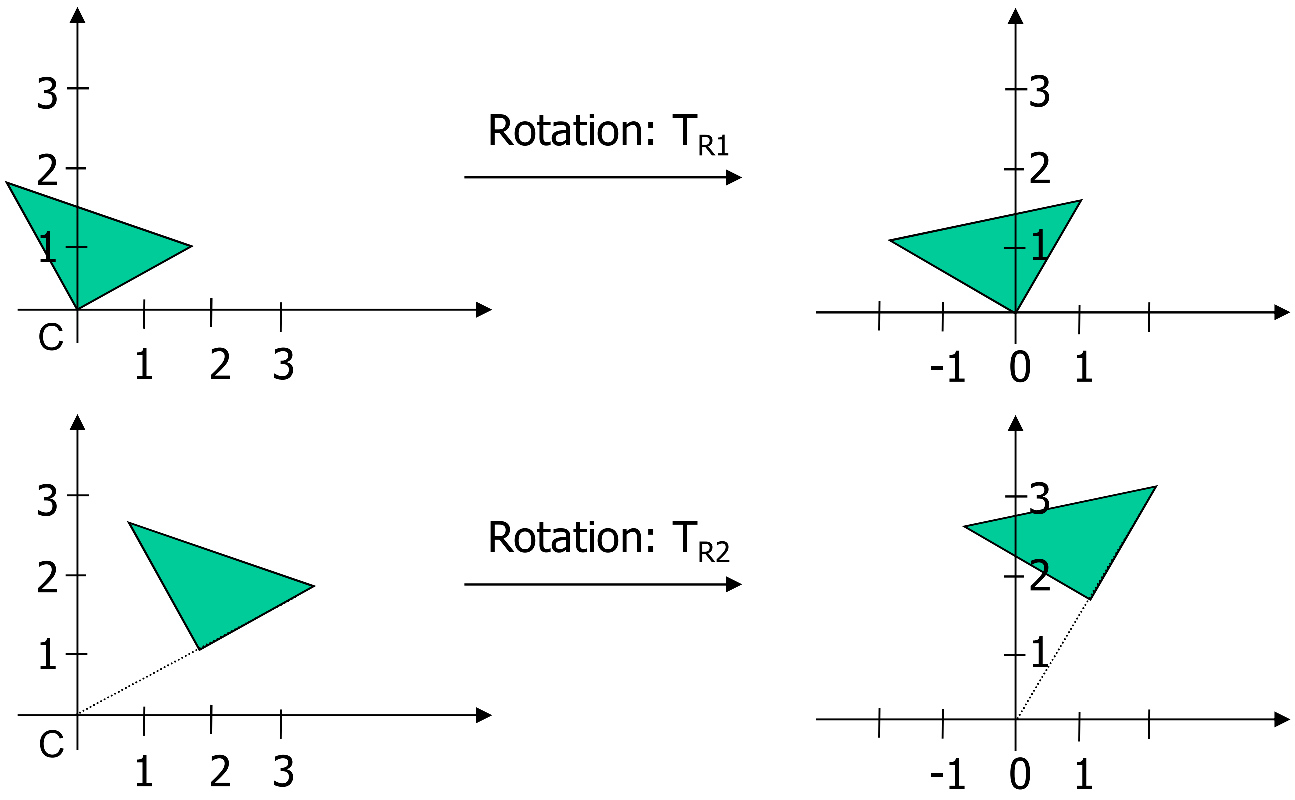
In 2D:

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In 3D:

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotation im 2D Raum



Beobachtung: Nur der Nullpunkt ist rotationsinvariant!

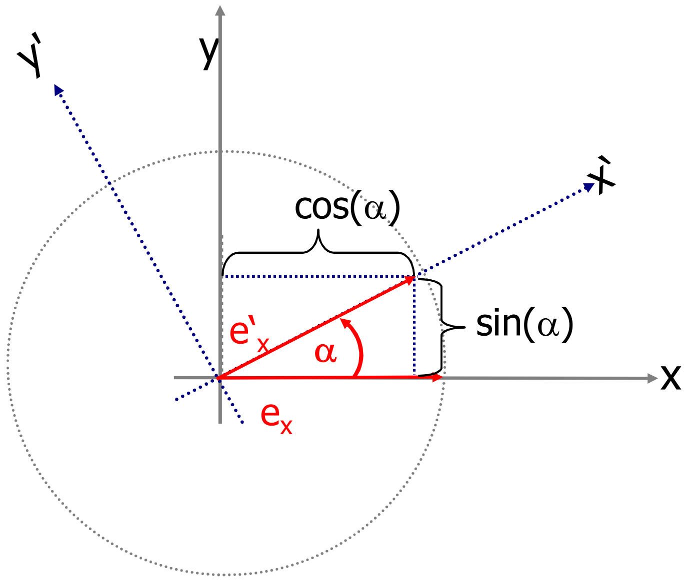
Rotation (Drehung) im 2D Raum:

Rotation eines Punktes $\vec{P} = [x_P, y_P]^t$ um den Winkel α bezüglich des Ursprungs:

d.h. $$\begin{bmatrix} x_P' \\ y_P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$$

Herleitung der Rotation des Punktvektors A im 2D Raum

Nicht das Objekt wird rotiert, sondern das Koordinatensystem:



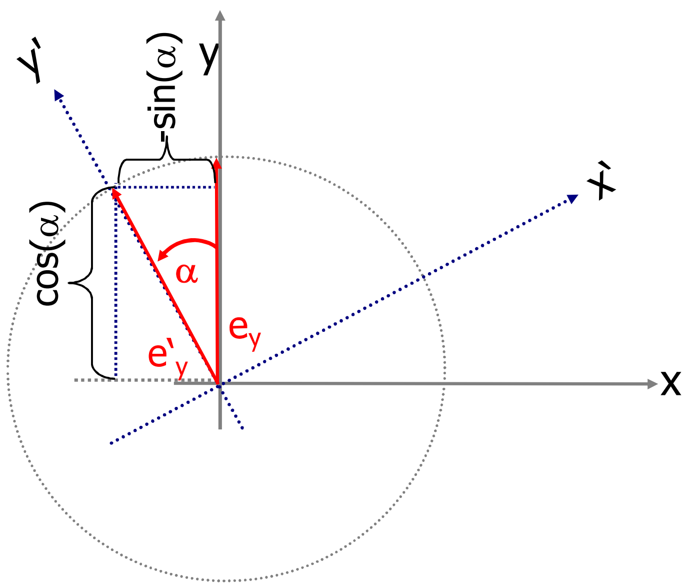
Bei einer Rotation um den Winkel α werden die Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems e_x und e_y auf die Basisvektoren des $e`_x$ und $e`_y$ des affinen Koordinatensystems abgebildet:

$$e'_x = T_R \cdot e_x$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & n.d. \\ \sin(\alpha) & n.d. \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Herleitung der Rotation des Punktvektors A im 2D Raum

Nicht das Objekt wird rotiert, sondern das Koordinatensystem:

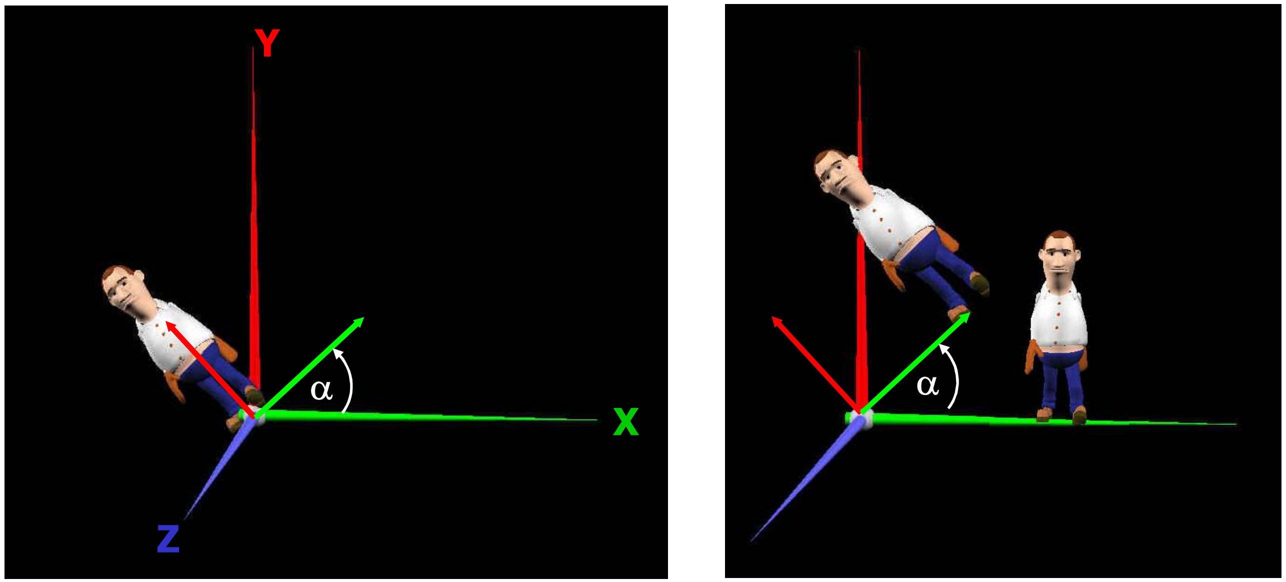


Bei einer Rotation um den Winkel α werden die Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems e_x und e_y auf die Basisvektoren des $e`_x$ und $e`_y$ des affinen Koordinatensystems abgebildet:

$$e'_y = T_R \cdot e_y$$

$$\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotation in homogenen Koordinaten um die Z-Achse



$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation in homogenen Koordinaten um die x- und y-Achse

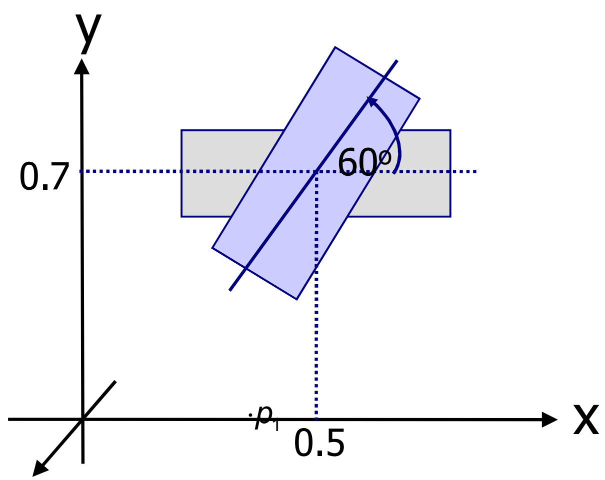
Rotation um die x-Achse:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um die y-Achse:

$$R_Y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quadrat soll um 60° gedreht werden:



3. Rücktransformation in die Originalposition
2. Rotation um die Z-Achse
1. Transformation in den Ursprung

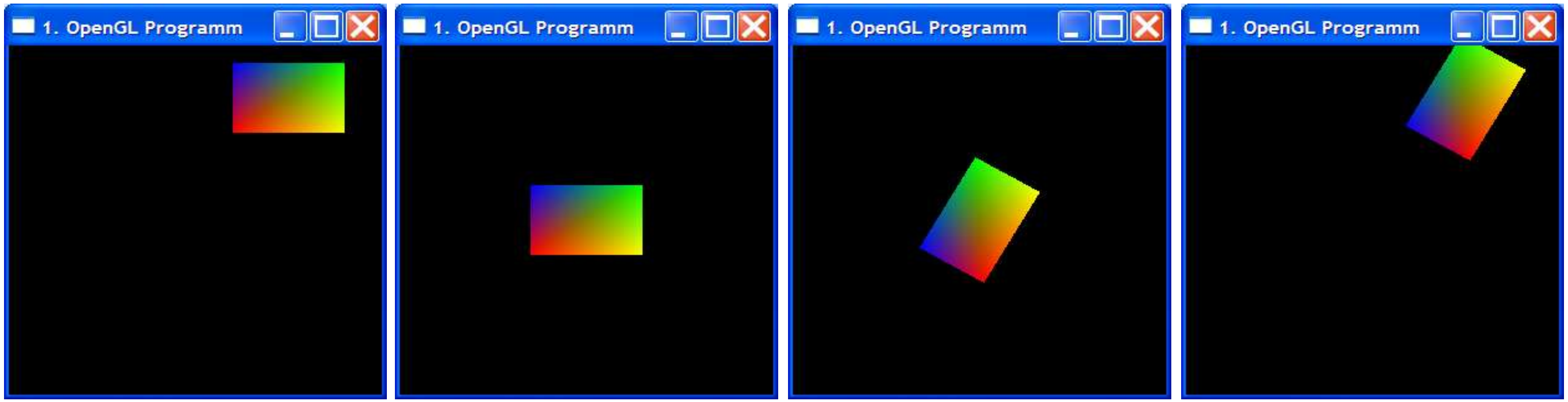
Reihenfolge in der die Transformationen angewendet werden ist wichtig!

Quadrat soll um 60° gedreht werden:

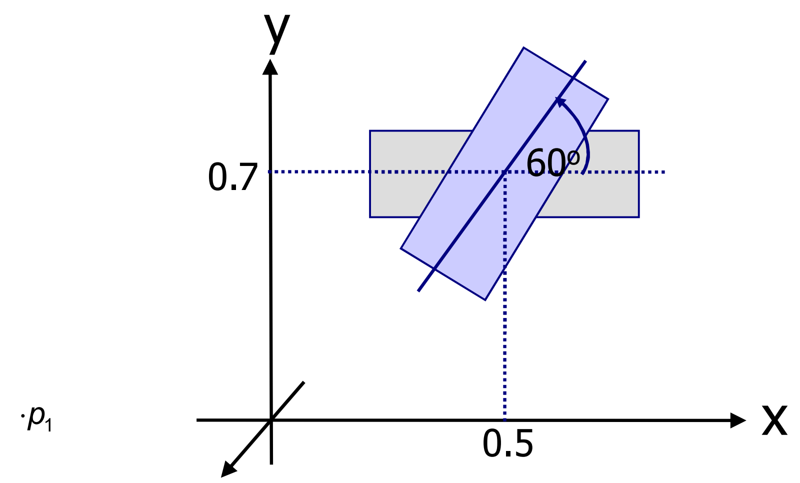
Transformationen werden in **umgekehrter** Reihenfolge angegeben:

Reihenfolge in der, die Transformationen auf das Quadrat angewendet werden:

```
glTranslatef( 0.5, 0.7, 0.);// Rücktransformat.
glRotatef( 60., 0., 0., 1.);
glTranslatef( -0.5, -0.7, 0.);//in den Ursprung
Quadrat();
```



Quadrat soll um 60° gedreht werden:



3. Rücktransformation in die Originalposition
2. Rotation um die Z-Achse
1. Transformation in den Ursprung

$$\vec{P}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(60^o) & -\sin(60^o) & 0 \\ \sin(60^o) & \cos(60^o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{1.} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{P}$$

(Die zweite Klammer „2.“ umfasst die Rotationsmatrix und die rechte Translationsmatrix.)

Matrixmulti-plikationen

1.

$$\begin{bmatrix} \cos(60^o) & -\sin(60^o) & 0 \\ \sin(60^o) & \cos(60^o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

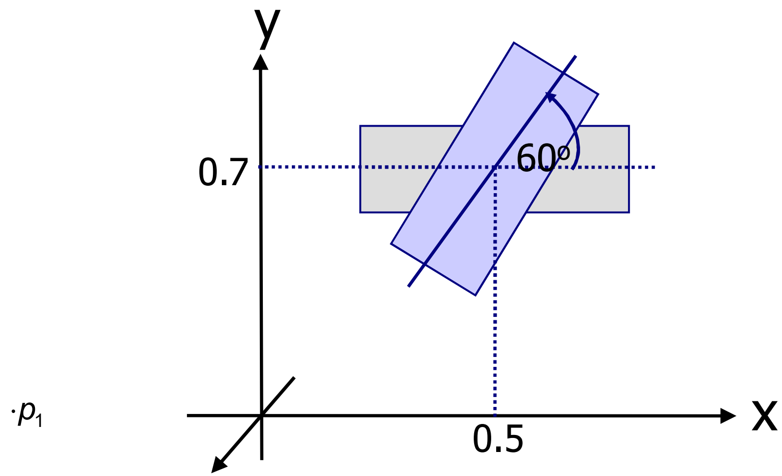
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos(60^o) & -\sin(60^o) & 0.5 \\ \sin(60^o) & \cos(60^o) & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(60^o) & -\sin(60^o) & 0.5 \\ \sin(60^o) & \cos(60^o) & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos(60^o) & -\sin(60^o) & -0.5\cdot\cos(60^o)+(-0.7)\cdot(-\sin(60^0))+0.5 \\ \sin(60^o) & \cos(60^o) & -0.5\cdot\sin(60^o)+(-0.7)\cdot(\cos(60^0))+0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quadrat soll um 60° gedreht werden:

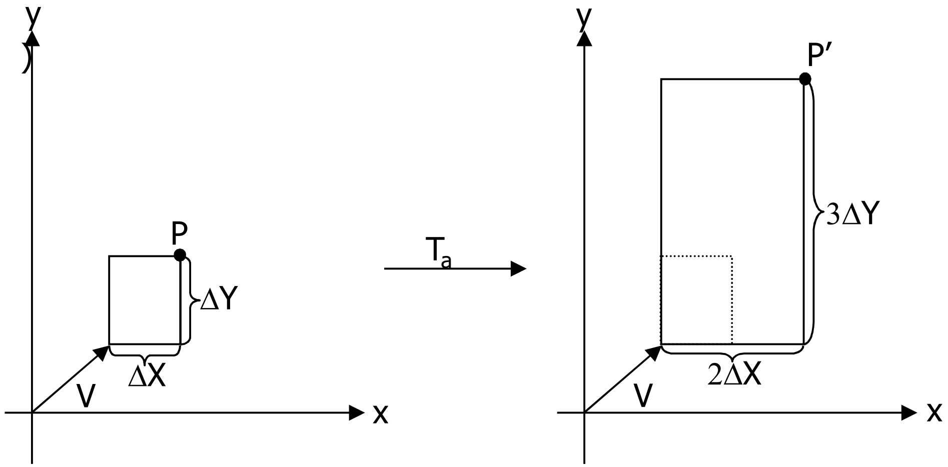


3. Rücktransformation in die Originalposition
2. Rotation um die Z-Achse
1. Transformation in den Ursprung

$$\vec{P}' = \begin{bmatrix} \cos(60^o) & -\sin(60^o) & -0.5\cdot\cos(60^o) + (-0.7)\cdot(-\sin(60^0)) + 0.5 \\ \sin(60^o) & \cos(60^o) & -0.5\cdot\sin(60^o) + (-0.7)\cdot(\cos(60^0)) + 0.7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{P}$$

Übung: Affine Transformationen

1a.

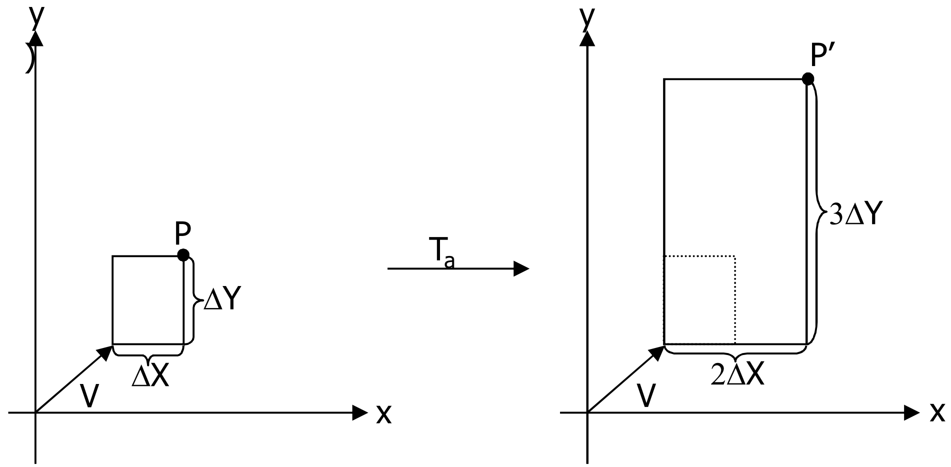


$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & v_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_x \\ 0 & 1 & -v_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot p$$

$$\Leftrightarrow \quad P' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -v_x \\ 0 & 3 & -2v_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot p$$

Wiederholung: Affine Transformationen

1a.



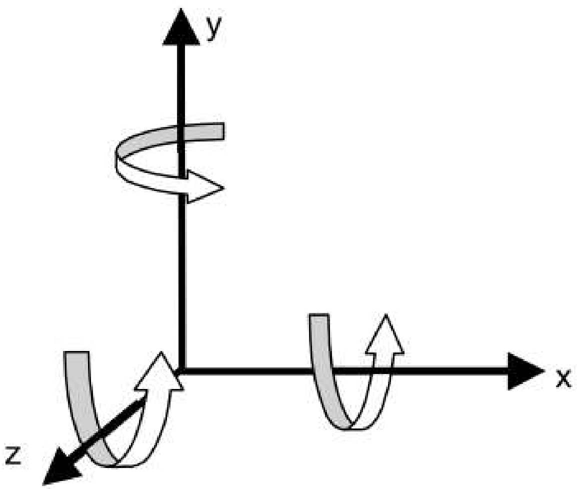
Transformieren
Sie den Punkt P
zur Kontrolle.

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -v_x \\ 0 & 3 & -2v_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_x + 2\Delta x \\ v_y + 3\Delta y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(v_x + \Delta x) - v_x \\ 3(v_y + \Delta y) - 2v_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -v_x \\ 0 & 3 & -2v_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x + \Delta x \\ v_y + \Delta y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Übung: Rotation um die y-Achse

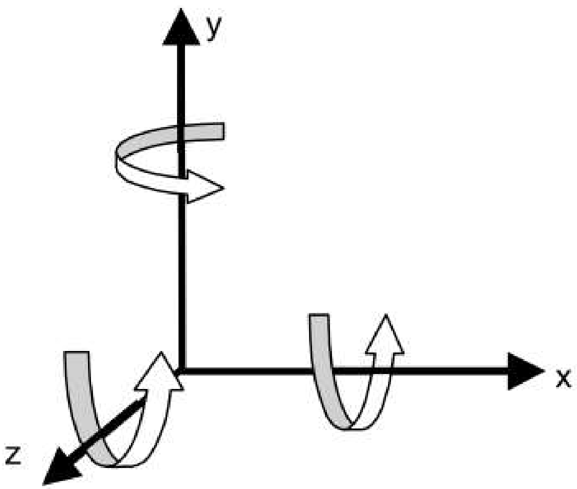
Wie ermittelt man die Rotationsmatrix bei einer Rotation um 90° um die y-Achse?

- z-Achse verläuft nach der Transformation entlang der x-Achse
- x-Achse verläuft nach der Transformation entlang der negativen z-Achse
- y-Achse bleibt gleich



$$\begin{pmatrix} z \\ y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übung: Rotation um die y-Achse



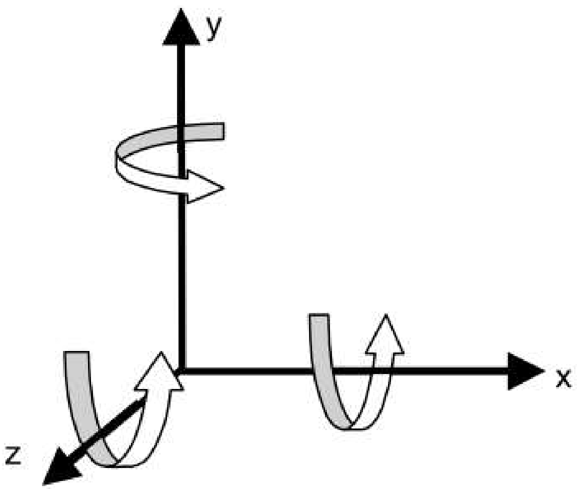
Wie ermittelt man die Rotationsmatrix bei einer Rotation um 90° um die y-Achse?

- z-Achse verläuft nach der Transformation entlang der x-Achse
- x-Achse verläuft nach der Transformation entlang der negativen z-Achse
- y-Achse bleibt gleich

$$\begin{pmatrix} z \\ y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übung: Rotation um die z-Achse

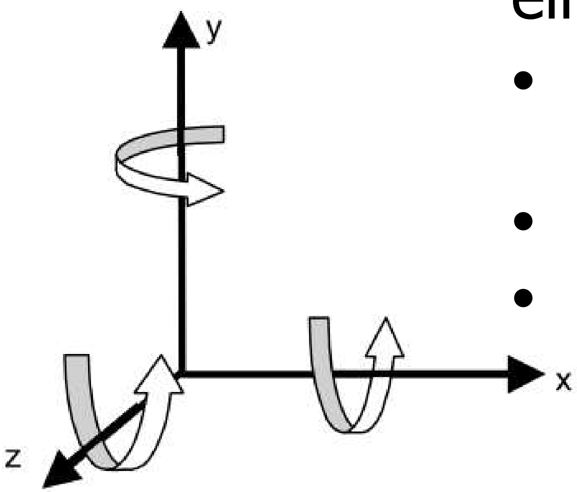
Wie ermittelt man die Rotationsmatrix bei einer Rotation um 90° um die z-Achse?



- y-Achse verläuft nach der Transformation entlang der negativen x-Achse
- x-Achse verläuft nach der Transformation entlang der y-Achse
- z-Achse bleibt gleich

$$\begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übung: Rotation um die z-Achse



2. Variante:

Wie ermittelt man die Rotationsmatrix bei einer Rotation um 90° um die z-Achse?

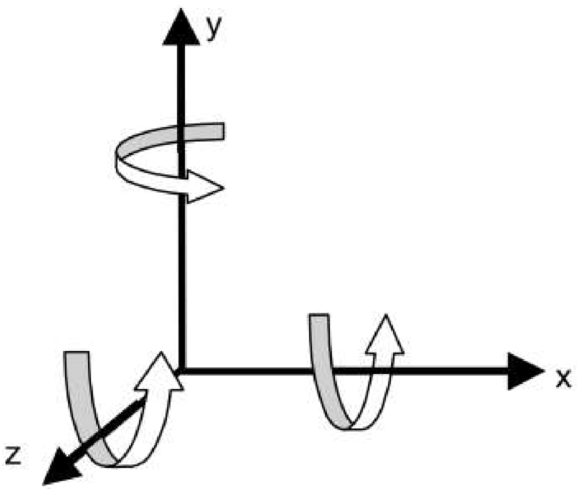
- Nach der Transformation liegen die negativen y-Werte auf der x-Achse
- und die x-Werte auf der y-Achse
- z-Achse bleibt gleich

$$\begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übung: Rotation um die x-Achse

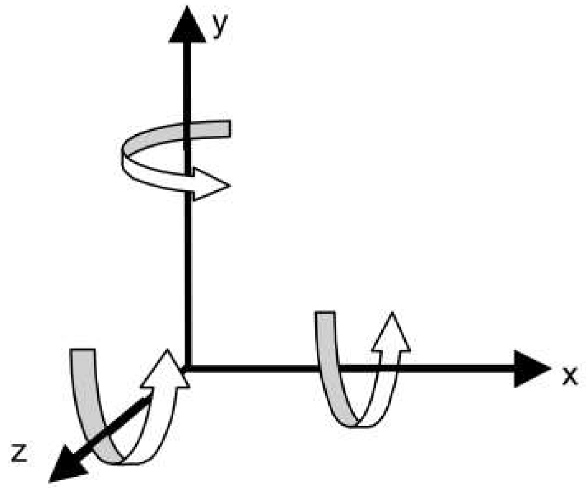
Wie ermittelt man die Rotationsmatrix bei einer Rotation um 90° um die x-Achse?

- z-Achse verläuft nach der Transformation entlang der negativen y-Achse
- y-Achse verläuft nach der Transformation entlang der z-Achse
- x-Achse bleibt gleich



$$\begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt sind Sie an der Reihe!



Spezielle Skalierungen

Projektion

Wenn genau einer der Skalierungsfaktoren s_x oder s_y gleich Null ist, so ergibt sich eine Projektion. Im 2D-Raum: Für $s_x = 0$ erhält man eine Projektion auf die y-Achse, und für $s_y = 0$ erhält man eine Projektion auf die x-Achse. Wenn der von Null verschiedene Faktor ungleich Eins ist, so ergibt sich zusätzlich eine Größenänderung.

Beispiel: Projektion auf die y-Achse im 2D-Raum

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Spezielle Skalierungen

Spiegelung

Wenn einer oder beide Skalierungsfaktoren negativ sind, so erhält man eine Spiegelung:

- mit $s_x = -1$ und $s_y = 1$ erhält man eine Geraden-Spiegelung an der y-Achse.
- mit $s_x = 1$ und $s_y = -1$ erhält man eine Geraden-Spiegelung an der x-Achse.
- mit $s_x = -1$ und $s_y = -1$ erhält man eine Punkt-Spiegelung am Ursprung.
  (Wenn einer oder beide Faktoren betragsmäßig ungleich Eins sind, so ergibt sich zusätzlich eine Größenänderung)

Beispiel: Spiegelung an der y-Achse im 2D-Raum $\begin{bmatrix} -x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

Kombination von Elementartransformationen

Erinnern Sie sich bitte, wie die homogenen Koordinaten entwickelt wurden:

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & y_1' & t_1 \\ x_2' & y_2' & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Wird die Matrixmultiplikation ausgeführt
2. danach erst die Translation

Das bedeutet, Transformationen in dieser Reihenfolge kann man einfach in eine Matrix schreiben – rechnen Sie nach:

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kombination von Elementartransformationen

Im umgekehrten Fall kann man die Einträge nicht einfach zusammen in eine Matrix schreiben:

1. erst die Translation
2. danach die Matrixmultiplikation

Die Transformationen in dieser Reihenfolge liefern folgendes Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1 t_1 + x_2 t_2 \\ x_2 & y_2 & x_1 t_1 + x_2 t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fixpunktbedingung:

Mit Hilfe der Fixpunkt-Bedingung $\vec{P}_F = T * \vec{P}_F$
kann man feststellen, ob eine Transformation T einen Fixpunkt $\vec{P}_F$ hat, also einen Punkt, der sich bei der Transformation nicht ändert.

Zuerst erstellen wir eine Transformationsmatrix, die einen Fixpunkt enthält:

1. Spiegelung an der y-Achse
2. Translation um eine Einheit entlang der x-Achse

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wo befindet sich der Fixpunkt?

Fixpunktbedingung:

Mit Hilfe der Fixpunkt-Bedingung $\vec{P}_F = T * \vec{P}_F$

kann man feststellen, ob eine Transformation T einen Fixpunkt $\vec{P}_F$ hat, also einen Punkt, der sich bei der Transformation nicht ändert.

Fixpunktbedingung:

1. Wo befindet sich der Fixpunkt?

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Anwenden der Fixpunktbedingung:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Ausrechnen:

$$p_1 = -1p_1 + 1$$

$$p_2 = p_2$$

Ergebnis: Wir haben eine „Fixgerade“, die parallel zur Y-Achse, durch den x-Wert 0,5 geht.